Universidade Federal de Sergipe - UFS
Departamento de Matemática - DMA
Cálculo I - Lista 1 - Limites e Derivada
Equipe de Unificação - 2016.1

1. Calcule os limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

2. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

   exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

3. Se $f(x) = [[x]] + [[-x]]$, mostre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, mas não é igual a $f(2)$.

4. Na Teoria da Relatividade, a Fórmula da Contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

   expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto no repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

5. Prove que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{sen(\pi/x)} = 0$.

6. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4\ sen\,(1/x)\,, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

   é contínua em $(-\infty, \infty)$.

7. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & se\ x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & se\ 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

8. A aceleração devida a gravidade G varia com a altitude em relação à superfície terrestre. G é função de r (a distância do centro da Terra) e, é dada por:

$$G\,(r) = \begin{cases} \dfrac{gMr}{R^3}, & r < R \\ \dfrac{gM}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

onde R é o raio da Terra, M a massa da Terra e g a constante gravitacional. Verifique se G é contínua.

9. Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real.

$$\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$$

10. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

11. Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se

$$\frac{4x-1}{x} < f(x) < \frac{4x^2+3x}{x^2}$$

para todo $x > 5$.

12. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x\,|x|$

    (b) Para que valores de x f é diferenciável?

    (c) Encontre uma fórmula para f'.

13. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

    (a) Se $a \neq 0$, encontre $f'(a)$

    (b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

14. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

15. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

16. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(t) = \frac{|2t-1| - |2t+1|}{t}.$$

Determine o domínio desta função. Em seguida, calcule o limite desta função quando t tende à 0.

17. Suponha que $A, B, C, a.b$ e c são constantes tais que $b^2 - 4ac < 0$. Ache todas as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{ax^2 + bx + c}.$$

18. A temperatura T(em $°C$) na qual a água ferve é dada aproximadamente pela fórmula:

$$T(h) = 100,862 - 0,0415\sqrt{h + 431,03}$$

onde h é a altitude(em metros, acima do nível do mar). Use o teorema do valor intermediário para mostrar que a água ferve a $98°C$ a uma altitude entre 4000 e 4500 metros.

19. Encontre números a e b tais que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1$$

20. (**Teorema do Ponto Fixo**) Suponha que $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ um função contínuas em todos valores $x \in [0,1]$. Prove que existe um $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = x_0$(x_0 é chamado de **ponto fixo** de f.)

21. (**Poluição do mar**) Um cano rompido em uma plataforma petrolífera da costa litorânea de Sergipe produz uma mancha de óleo circular que tem y metros de espessura a uma distância de x metros do local do vazamento. A turbulência torna difícil medir diretamente a espessura da mancha no locla do vazamento. Mas próximo do local do vazamento observa-se qie

$$y = \frac{0,5(x^2 + 3x)}{x^2 + x^2 + 4x}.$$

Supondo que a distribuição de óleo no mar seja contínua, qual é a espessura estimada no local do vazamento?

22. O raio da terra é aproximadamente $6.400.000km$; um corpo situado a $r$km do centro da terra pesa $w(r)$ kg, onde,

$$w(r) = \begin{cases} Ar; & r \leq 4.000.000 \\ \frac{B}{r^2}; & r > 4.000.000 \end{cases} \tag{1}$$

de $w(r)$. e A, B constantes positivas. Qual deve ser a relação entre A e B para que $w(r)$ seja contínua para qualquer valor de r? Faça o esboço do gráfico

23. (i) Prove que f é contínua em x_0 se, somente se,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

(ii) Utilizando o resultado de (i) mostre que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} sen(x) = sen(x_0).$$

24. Suponha que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} |f(x)| = 0$. Então podemos afirmar que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0?$$

Justifique sua resposta.

25. (**Metereologia**) Suponha que a temperatura do ar seja $30°F$. Nesse caso, a sensação térmica para uma velocidade do vento v(em milhas por hora) é dado por:

$$S(v) = \begin{cases} 10; \quad 0 \leq v \leq 7 \\ \frac{v-7}{\sqrt{v+2-3}}; \quad 7 < v < 10 \\ 2\sqrt{v-7}+3; \\ v \geq 10. \end{cases} \tag{2}$$

Verifique para quais valores de v a função S é contínua, fazendo uma análise detalhada da função.

26. **Raízes de uma equação quadrática quase linear** A equação $ax^2 + 2x - 1 = 0$, onde a é constante, apresenta duas raízes se $a > -1$ e $a \neq 0$, uma positiva e outra negativa:

$$r_+(a) = \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}; \quad r_-(a) = \frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}$$

(i) O que acontece com $r_+(a)$ quando $a \longrightarrow 0$? E quando $a \longrightarrow -1^+$?
(ii) O que acontece com $r_-(a)$ quando $a \longrightarrow 0$? E quando $a \longrightarrow -1^-$?

Faça uma análise geral destas funções.

27. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$ no ponto $P_0 = (1, 2)$.

Sugestões e respostas

1. (a) $\dfrac{2}{3}$

   (b) $\dfrac{1}{48}$

   (c) $\dfrac{5}{4}$

2. $a = 15$ e o limite é igual a -1.

3. Lembre-se que o limite existe se, e somente se, os limites laterais existem e são iguais.

4. 0

5. Lembre-se que $-1 \leq sen\ x \leq 1$, para todo x, e use o Teorema do Confronto.

6. Note que a função f é contínua para todo $x \neq 0$ (por que?). Depois analise a continuidade em $x = 0$.

7. $a = b = \dfrac{1}{2}$

8. G é contínua.

9. Use o Teorema do Valor Intermediário.

10. Comece chamando o número desconhecido de x, e tente interpretar a questão como uma equação envolvendo x.
11. Use o Teorema do Confronto.
12. f é diferenciável para todo x.
13. $f'(a) = \dfrac{1}{3a^{2/3}}, \ a \neq 0.$
14. Compare com a definição de derivada.
15. Definição de derivada.
16. *A priori* faça o estudo das funções modulares.
17.
18. Use o Teorema do Valor Intermediário
19. Para que o limite tenha um valor $L = 1$ é necessário neste caso que quando $x \to 0$ ocorra uma indeterminação.
20. Defina uma função auxiliar.
21.
22.
23. Pode-se usar a expressão do seno da soma de ângulos.
24.
25.
26. Racionalização do numerador.
27. Definição de derivada e a definição da equação da reta tangente em um ponto.